Понеделник , 09 јули 2018

**Проблем 1**

Нека Γ е опишана кружница околу остроаголниот триаголник $ABC$ . Точките $D$ и $E$ припаѓаат на страните $AB$ и $AC$ , соодветно, при што $AD = AE$ . Симетралите на отсечките $BD$ и $CE$ ги сечат помалите кружни лаци $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$ од кружницата Γ во точките $F$ и $G$ , соодветно. Докажи дека правите $DE$ и $FG$ се паралелни (или се совпаѓаат).

**Проблем 2**

Определи ги сите позитивни цели броеви $n \geq 3$ за кои постојат реални броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ , такви што $a_{n+1} = a_1$ , $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2},$$

за $i = 1, 2, \ldots, n$ .

**Проблем 3**

*Анти-Паскалов триаголник* е таблица во облик на рамностран триаголник, која се состои од броеви при што секој број, освен за броевите од најдолната редица, е еднаков на разликата по апсолутна вредност од броевите кои се непосредно под него. На пример, следната таблица е анти-Паскалов триаголник со четири редици, кој ги содржи сите цели броеви од 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Дали постои анти-Паскалов триаголник со 2018 редици и ги содржи сите цели броеви од 1 до 1+2+....+2018.

Macedonian (mac), day 2

Вторник , 10 јули 2018

**Проблем 4**

*Позиција* е било која точка $(x, y)$ од рамнината таква што $x$ и $y$ се природни броеви кои што се помали или еднакви на 20.

На почеток секоја од 400 позиции е слободна. Ања и Борјан играат игра во која наизменично повлекуваат потези, при што Ања игра прва. Во секој свој потег Ања поставува ново црвено каменче на слободна позиција таква што растојанието на било кои две позиции на кои се наоѓаат црвените камчиња е различна од $\sqrt{5}$. Во секој свој потег Борјан поставува ново плаво каменче на некоја слободна позиција. (Позиција на која се наоѓа плаво каменче може да биде на било кое растојание од другите позиции на кои се наоѓа некое каменче). Играта завршува тогаш кога некој од нив повеќе не може да повлече потег.

Одреди го најголемиот број К таков што Ања може да постави барем К црвени каменчиња, без обзир на тоа како Борјан ги поставувал своите плави каменчиња.

**Проблем 5**

Нека $a_1, a_2, \dots$ е бесконечна низа од позитивни цели броеви. Нека постои цел број $N > 1$, таков што за секој $n \geq N$ бројот

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

е цел број. Докажи дека постои позитивен цел број $M$ таков што $a_m = a_{m+1}$ за секој $m \geq M$.

**Проблем 6**

За конвексниот четириаголник $ABCD$ е исполнето равенството $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. Точката $X$ е избрана во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ при што се исполнети равенствата

$\measuredangle XAB = \measuredangle XCD$ и $\measuredangle XBC = \measuredangle XDA$

Докажи дека $\measuredangle BXA + \measuredangle DXC = 180°$.

Language:**Macedonian**

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Секоја задача се бодува со најмногу 7 поени